物理学選書10

山内恭彦・菊池正士・小谷正雄 編集

一般相対性および重力の理論

東京大学名誉教授
理学博士
山内恭彦

大阪大学教授
理学博士
内山龍雄

大阪市大教授
理学博士
中野董夫

共著

東京 裳華房 発行

THEORY OF GENERAL RELATIVITY AND GRAVITATION

by

TAKAHIKO YAMAUCHI, D. SC.
RYOYU UTIYAMA, D. SC.
TADAO NAKANO, D. SC.

SYÔKABÔ

TOKYO

序

Einstein が一般相対性理論を，1915 年に発表してから既に 50 余年もたっている．最初はその難解さのため，取りつきにくかったこの理論も，彼自身，その他 Weyl，Eddnigton などの本で，ややわかり易い形に整った体系として紹介され，またこの理論を支持する実験結果もいくつか現われるようになって，多くの理論物理学者の関心をひくようになった．そして，その時空構造に対する全く斬新な考え方，これを表現する理論体系の華麗さに魅了され，一時はかなりのブームを招いた．ところが，その後この理論によらなければ説明できないような現象があまり見出されず，物理学の研究の主流も，原子的問題に集中し，そこでは特殊相対論でことが足りるため，一般相対論に対する熱は急激にさめてしまった．このことは，Einstein を始めとして，研究者の多くが一般相対論の拡張を統一場理論に求めたことも，その理由の一つに挙げられよう．今日の場の理論から考えて，あの段階で重力場と電磁場とを統一しようとしたのは，かなり無理なことだったと思われる．

ところが，近頃になって，ロケットや人工衛星などによる観測が進むにつれて，宇宙論の研究材料が急激に増加した．この方法によれば，地球大気に遮られて観測できなかった放射線，粒子も自由に捉えられる．原子的現象では無視できた重力が，こういう大宇宙の問題では，大きな役割を演ずることは疑いないところである．今日色々な宇宙模型が提唱されているが，現象論から一歩進んだ基礎に立つ模型を与え得るのは，一般相対論だけである．

一般相対論を学ぶのに，最初の障碍はテンソル算法，Riemann 幾何学である．ところがこれは，特殊相対論のローレンツ変換，Minkowski 空間を，一般の座標変換，曲率のある空間に一般化するための数学的手段で，理論の物理的本質ではない．ちょうど，微積分学と古典力学の理論との関係に相当する．物理理論はその数学的表現とは不可分の関係にあるから，数学形式を軽んずるわけにはいかないが，大切なのはその形式により表現される物理的内容である．一般相対論の物理としての重点は，Newton の万有引力論に代わる，もっと包

括的な新しい重力論にある．本書があえてこれを標題に加えた理由である．

本書の前半（第 IV 章まで）では，一般相対論への入門書の役目をはたすために，Einstein の理論の基本的な事項をできるだけ平易に説明した．特殊相対論に関する大体の知識をもった読者ならば，他の参考書をみなくとも，必ず理解できるように説明したつもりである．また天降り式に Einstein の理論を紹介するのでなくて，読者が“一般相対論”を自分で創造していくといった体裁をとった．また従来の教科書にあるような数学偏重におちいらないように注意したから，読者は退屈せずに理論の展開を追っていけると思う．

これ対して後半，すなわち第 V 章以降は，幾分程度も高く，内容も比較的新しいこと，また他の教科書にあまり見かけないようなことが述べられている．特に第 V 章不変変分論や，最後の重力場の正準形理論（第 IX 章）は，内容が幾分数学的にすぎるうらみもあるが，オリジナルの論文は別として，普通の書物には見られないような高度の内容のもので，本書の特徴として自負しているものである．これは一般相対論を学ぶ者にはもちろんのこと，素粒子論を専攻する研究者にも役立つことを期待している．

本書は三人の著者の共著になっているが，原稿を書き下したのは内山，中野の両氏で，特に内山氏の執筆した部分が多い．ただし，記述の方針，内容の選定には三人で集まって合議し，原稿にも全部目を通して，隔意ない意見を交換し，これに従って訂正，書き直し，または削除した部分も少なくない．そこで，同じ資格で名を連ねるのは不当なようであるが，全巻に対して責任を負うという意味でこの形をとった．最後に，本書の成立に対して献身的努力を惜しまなかった裳華房の遠藤恭平氏と，この面倒な印刷を，いろいろな要求を容れて，ここまできれいに組み上げた印刷所に対して，深い謝意を表する．

1967 年 11 月 8 日

山　内　恭　彦

増補の序

本書はその題名が示すように，一般相対性理論，特に相対論的重力理論を，その誕生から近年あきらかにされたことがらに到るまで，一応まとまった理論体系として紹介することをその目的としている．特殊相対性理論については，初版の序文にもあるように，読者は既にそれを修得されているものとして，その結論や知識をなんらの説明もなしに援用した．したがって特殊相対性理論をまだ勉強していない読者にとっては本書の内容はいささか不親切である．しかし前もって特殊相対性理論をいそいで勉強しようとしても，それだけを要領よく解説した書物は見あたらない．

そこで本書の第三版を出すにあたって，巻末に付録Bとして，特殊相対性理論の概説を新らしくつけ加えた．電磁気学やNewton力学についての予備知識さえあれば必らず理解できるよう，わかりやすく解説した．これは概説にはちがいないが，特殊相対性理論の第一歩から説き起こし，ともかく本書の本文を理解するに十分な程度に特殊相対性理論の全容を説明した．例えていえばこの概説は「帯」ほどに長くはないが，しかも「帯」として十分に使えるように，本質的部分をもらさず説明した．しかし反面，「たすき」ほどの短さになるよう簡潔にまとめたつもりである．したがってこの付録Bは単に本書の本文への手引書として役立つばかりでなく，本書と切りはなしても，特殊相対性理論を手取り早く勉強したい人々にとって，便利な1冊の独立した教科書になり得ると確信する．

1971年4月

内山龍雄

目　　次

第 I 章　一般相対性理論の基礎

第 II 章　テンソル解析

第 III 章　一般相対論的力学ならびに電磁気学

第 IV 章　重力場の方程式

第 V 章　不変変分論

第 VI 章　重　力　波

第 VII 章　Einstein の理論の実験的検証

第 VIII 章　宇宙論への応用

第 IX 章　重力理論の正準形式と量子化

付　　　録

付録 B. 特殊相対性理論概論

付録 B.　特殊相対性理論概論

本書は特殊相対性理論の知識を前提として書かれたものである．しかし特殊相対性理論をまえもって勉強しようとしても，それだけを書いた適当な教科書とか単行本は，わが国にはおそらく無いと思う．そこで他の参考書を用意しなくても，本書を読了できるように，特殊相対性理論の概要を以下に説明して，読者の便をはかることにする．

§ B. 1　序　論

Newton の力学の法則のうち慣性の法則とよばれる第一法則は，この法則が成立するような座標系がこの世の中に存在することを主張するものである．すなわち適当な座標系を設け，これを基準として質点の運動を観測したとき，外力の作用していない質点が等速直線運動をしているように見えるとしよう．このような座標系は**慣性系**とよばれ，われわれは必らず慣性系を設けることができるということが，第一法則の主張である．この説明からわかるように，慣性系はただ1個ではなく無限に多数の慣性系が存在する．いまSを1つの慣性系としよう．Sに対して一定の速度で走っている第2の座標系を S′ とする．S′ からみても，外力を受けない質点が等速直線運動をしているように見えることは容易にわかるであろう．したがって S′ もまた慣性系である．

S と S′ の関係を数式で示すと次のようになる．S からみたとき，時刻 t に於ける質点の位置を (x, y, z) とする．これを S′ からみると，時刻 t' に質点は (x', y', z') に在るとする．最も簡単な場合として，$t=0$ の瞬間には S′ の時計の読み t' も0とし，このとき，両座標系の原点は一致しているとする．さらに x, y, z 軸はそれぞれ，x', y', z' 軸と平行で，S′ は x 軸の正の方向に一定の速さ v で走っているものとする．このような場合には質点の座標について関係式

$$t' = t,\quad x' = x - vt,\quad y' = y,\quad z' = z \tag{B. 1-1}$$

が成立する．この関係はわれわれの常識にかなったもので，普通 **Galilei 変換**とよばれる．

もし質点が力 $\vec{f}$ を受けて運動しているときは，Newton の第2法則により

$$m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \vec{f} \qquad \text{（S系からみた場合）}$$

が成立する．mは質点の質量である．この式に（B. 1-1）を代入して S′ 系の量で書きかえても

$$m\frac{d^2\vec{x}'}{dt'^2} = \vec{f} \qquad \text{（S′ 系からみた場合）}$$

となる．すなわち，Newton の運動の法則はSからみても，S′ を基準にしても，その形が変らない．つまり Newton の方程式は Galilei 変換に対して不変である．したがって

力学現象に関する限りでは，S と S′ は全く同等で，どちらも慣性系として力学現象の記述に適した座標系といえる．それゆえSからみた質点の速度が質点の本当の速度（つまり絶対速度）であり，S′ からみたときの質点の速度は見かけのものだなどということはできない．つまり質点の絶対速度について語ることは力学に関するかぎり無意味であるといえよう．

しかし電磁気現象を考慮すると事情は変わってくる．Maxwell の理論によれば，電磁波は真空中をどんな方向にも一定の速さ c で伝播する．いま慣性系Sからみたとき，光の伝播速度が Maxwell の理論どおりに c であるとする．同じ現象を S′ からみれば，光の x' 方向の速さは (B.1-1) からわかるように，$c-v$ となる．つまり S′ を基準にとれば，Maxwell の理論は成り立たない．したがって Maxwell の理論が正確に成り立つのは，無数にある慣性系のなかで，ただ1つの特別な系Sを基準とした場合に限られる．このような特別な慣性系としては，現実には全宇宙の重心Gの静止（座標）系が考えられる．つまりそのような系からみれば G は静止してみえる．このような慣性系を**絶対静止系**とよび，この系を基準にした場合の質点の速度を**絶対速度**という．したがって真空中における光の絶対速度は c である．

いま地球上に固定した座標系を S′ とする．地球の自転や公転の影響を無視すれば，いいかえると，地球が或る瞬間に絶対静止系Sに対して一定の速度で走っていると考えれば，その瞬間だけ S′ を慣性系とみなしてかまわない．S′ を基準として光の伝播速度を測り，その値が c からどれだけズレているかを求めることにより地球の絶対速度が測定できることは上述の議論から容易にわかろう．

この考えにもとづいて地球の絶対速度を測定しようとした実験のなかで最も有名なものは Michelson - Morley の実験である．議論を簡単にするために地球の絶対速度の方向を x' 軸，これに直角な方向を y' 軸とする．両軸上で原点から，いずれも l_0 の距離に鏡をおき，原点から発射された光をこれらの鏡で反射させて再び原点に送り返すとする．もし地球が速さ v で x' 方向に走っていれば x'，および y' 軸に沿って往復した光の所要時間にはくい違いがある．このくい違いを原点におかれた干渉計で測定するというのが彼等の実験の骨子である．

両コースの光の所要時間は絶対静止系 S を基準として計算すれば簡単である．y' 軸コースの所要時間は

$$t_y = 2\frac{l_0}{c}\Big/\sqrt{1-\beta^2}, \qquad \beta = \frac{v}{c} \tag{B.1-2}$$

これに対して x' 軸コースでは

$$t_x = 2\frac{l_0}{c}\Big/(1-\beta^2) \tag{B.1-3}$$

ところが Michelson - Morley の実験結果では両コースの時間の差は観測できなかった．したがって地球は絶対静止していると断定しなければならないが，これはあまりにも承服しがたい結論である．そこで $t_x = t_y$ という実験事実を説明するため Lorentz はいわゆ

る“**Lorentz 収縮**”説を提唱した．この説によれば，速さvで運動している物体の長さlは静止している時の長さl_0に比べて短かく，$l=l_0\sqrt{1-\beta^2}$の関係が成り立つ．したがって原点からおのおのの鏡までの距離が，S′（地球）からみれば，どちらもl_0であっても，Sからみれば，x'方向の距離は$l=l_0\sqrt{1-\beta^2}$となる．したがって，t_xは（B.1-3）ではなくて（Sからみた場合）

$$t_x=2\frac{l}{c}\Big/(1-\beta^2)=2\frac{l_0}{c}\sqrt{1-\beta^2}/(1-\beta^2)=t_y$$

となる．

Lorentz の仮説は美事に Michelson - Morley の実験を説明したが，「それなら，なぜ運動している物体は収縮するのか」という説明がなく，したがって疑問点を他の形にいいかえただけで，問題を本当に解決したことにはならない．

§ B.2 特殊相対性原理と光速度不変の原理

Michelson - Morley 等の実験結果を素直に受けとれば，S′ からみても S と同様に，Maxwell の理論は正確に成り立ち，光の速度はcであることを実証していると考えられる．また地球の絶対速度vが0であると断定するよりは，むしろ絶対速度というような概念は物理的手段では観測できないもので，物理学の対象となるようなものではないことを示していると解釈するほうが妥当のように思われる．

そこで Einstein はこれらの事実を原理として採りあげ，新しい理論を創るための礎石とした．この原理は2つあって，その1つは**相対性原理**といわれ，それは次のようなものである．すなわち**或る座標系を基準としたとき，そこで成り立つ物理法則は，この系に対して一定の速度で走っている他の座標系からみても，そのまま成立する**．この原理によれば単に力学のみならず，すべての物理法則が慣性系SならびにS′ で全く同じ形で成立する．したがってすべての慣性系は物理現象を簡単な形式で記述するのに適したもので，この目的に関して慣性系はすべて同等で，それらの間に優劣をつけることは原理的に不可能である．たとえば或る慣性系を基準にしたとき Maxwell の理論が破綻をきたすことを手掛りとして，その系の絶対速度を測定しようとしても，この原理にしたがえば，そのような企ては全く無駄なことになる．

この原理は互いに相対的に等速直線運動をしている座標系同士の同等性を主張するもので，任意の相対運動をする場合はこの原理の対象とはならない．そこで後者のような一般的な場合と区別するために，この原理を**特殊相対性原理**とよぶ．

もう1つの原理は**光速度不変の原理**である．これは**真空中の光の速度は光源の運動に無関係である**という主張である．特殊相対性理論では，われわれの常識に反するような結論にしばしば出会うが，それらはこの原理にもとづくものが多い．

さて Maxwell の方程式と Galilei 変換（B.1-1）とを組み合せると，S で Maxwell の理論が成り立てば，前述のとおり S′ では成り立たないことになり，特殊相対性原理の要請に反する．そこでわれわれが従来から正当なものと信じてきた Galilei 変換を少し修

正しなければならない．

そこで（B.1-1）を導いたのと同じ場合を考えよう．（B.1-1）の最も手近な拡張として

$$t' = at + bx, \quad x' = fx + gt, \quad y' = y, \quad z' = z \qquad \text{(B.2-1)}$$

とおく．a, b, f, g は未定係数である．$t = t' = 0$ の瞬間にS系の原点O（この瞬間には，仮定によりOは S′ 系の原点 O′ とも一致している）に固定されている光源から発射された光波は，Sからみて t 秒後には，その最先端はOを中心とした半径 ct の球面となる．したがって球面上の点 P(x, y, z) は

$$x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = 0 \qquad \text{(B.2-2)}$$

を満足する．

これを S′ からみると，光速度不変の原理から，光の最先端はやはり O′ を中心とした球面となる．さらに相対性原理により光速は c であるから，点Pに光の到達した時刻を t' とすれば，

$$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 - (ct')^2 = 0. \qquad \text{(B.2-2)}'$$

が成立する．x', y', z' は S′ 系からみた点Pの座標である．

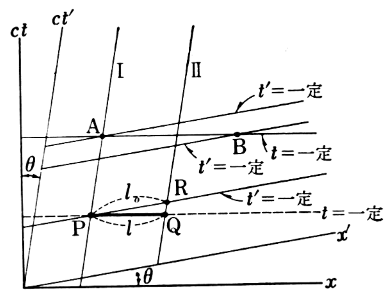
（B.2-2)′ に（B.2-1）を代入し，O′ がOに対して一定の速さ v で x- 方向に走っている事実を考えにいれ，さらに（B.2-2）を使うと a, b, f, g は決定される．結果は

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \beta = v/c \qquad \text{(B.2-3)}$$

となる*)．

（B.2-3）の関係を **Lorentz 変換** とよぶ．それは，Einstein よりさきにこの関係式を Lorentz が全く別の論拠から導いたからである．

（B.2-3）からは種々の興味ある結論が導かれる．それにはまず（B.2-3）の関係を図示するほうがわかりやすい．y, z 軸を省略して，S 系の x 軸と，ct 軸を直交軸とした図が第 B.1 図である．この系からみると t = 一定の瞬間は，x 軸に平行な水平直線で示される．



第 B.1 図

Sからみた場合の x' 軸は（B.2-3）で $t' = 0$ とおいた直線，すなわち

$$ct = \beta x$$

である．一般に t' = 一定という（S′ 系からみた）瞬間は x' 軸に平行な傾斜した直線で示され，その傾斜角 θ は $\beta = \tan\theta$ であたえられる．

*) $v \to 0$ のとき $t' \to t$, $x' \to x$ となるように a, f の符号をきめた．

さて第 B.1 図で2点 A, B はSからみれば同時刻だが，S′ からみれば，AがBより未来にあることが容易に理解できよう．このように同時刻という概念は絶対的なものでなく，必らず「ある系からみた時に同時刻」というように，註釈をつけなければならない．

Lorentz 収縮も（B.2-3）から容易に導かれる．第 B.1 図の2本の斜線 I, II は S′ 系に固定された物指の両端の歴史的軌跡である．これらはそれぞれ

$$\text{I}: \quad \frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}} = x'_{\text{P}} = \text{一定} \qquad \text{(B.2-4)}$$

$$\text{II}: \quad \frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}} = x'_{\text{R}} = \text{一定} \qquad \text{(B.2-4)}$$

という直線である．

静止している物指の長さ l_0 は，図の $\overline{\text{PR}}$ で示される．すなわち

$$l_0 = x'_{\text{R}} - x'_{\text{P}}$$

これをSからみると，物指は速さ v で走っている．その長さ l は図の $\overline{\text{PQ}}$ で表わされる．(B.2-4)′, (B.2-4) の左辺にそれぞれQおよびPの座標 $(x_{\text{Q}}, t_{\text{Q}})$, および (x_P, t_P) を代入して，(B.2-4)′ から (B.2-4) を引くと

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\Big[x_{\text{Q}} - x_{\text{P}} - v\{t_{\text{Q}} - t_{\text{P}}\}\Big] = x'_{\text{R}} - x'_{\text{P}} = l_0$$

QとPはSからみて同時刻だから $t_{\text{Q}} = t_{\text{P}}$. したがって

$$l = x_{\text{Q}} - x_{\text{P}} = l_0\sqrt{1-\beta^2}.$$

走っている時計の進みがおくれることも（B.2-3）から導かれる．S′ の原点に固定された時計の歴史的軌跡はSからみて ct' 軸で表わされる．すなわち

$$0 \equiv x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

これを（B.2-3）の第1式に代入して x を消去すると

$$t' = \frac{t\{1-(v/c)^2\}}{\sqrt{1-\beta^2}} = t\sqrt{1-\beta^2} < t.$$

すなわち，S 系の時計が t 秒たつ間に，S からみた S′ の時計は $t\sqrt{1-\beta^2}$ 秒しか進まないことになる．

§ B.3 Lorentz 変換

(B.2-3) であたえられたような S 系と S′ 系との関係は Lorentz 変換のなかでも特に簡単な一例にすぎない．S 系に対して x', y', z' 軸が全く勝手な方向を向いた第2の直交座標系 S′ を考えよう．S′ が S に対して任意の一定速さで，また任意の一定方向に走っているものとする．S′ 系に備えた時計の読みを t' として，$t = t' = 0$ のとき両系の原点は一致していたものとする．ある事件の起きた時刻と場所を S, ならびS′ 系からみたとき，それぞれ (t, x, y, z) および (t', x', y', z') とする．あるいは記号を簡略化して，x を x^1, y を x^2, z を x^3 で示す．さらに ct を x^0 と書くことにすると，この事件の

座標は S, S′ 系からみて，それぞれ (x^μ) および $(x^{\mu\prime})$ となる．ただし右肩の μ は0, 1, 2, 3 を代表しているものとする．

さてここで考えているような一般の場合には，(B. 2 - 3) の一般化として次の線型関係式が考えられる：

$$x^{\mu\prime} = \sum_{\nu=0}^{3} a^\mu{}_\nu \cdot x^\nu \quad (\mu = 0, 1, 2, 3)$$

$a^\mu{}_\nu$ は，μ, ν がそれぞれ独立に 0, 1, 2, 3 の値をとるから合計 16 個の定数の係数である．これからは，同一の式の中に上下に現われる同じ文字の添字については必らず 0～3 まで和をとるものと約束して，記号 $\sum$ をはぶいて上の式を

$$x^{\mu\prime} = a^\mu{}_\nu \cdot x^\nu \tag{B. 3 - 1}$$

と書くことにする．

ここで次のような記号を導入する：

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & : \quad \mu = \nu = 1, 2, 3 \\ 0 & : \quad \mu \neq \nu \\ -1 & : \quad \mu = \nu = 0. \end{cases}$$

これを用いると，光の波面の方程式 (B. 2 - 2), (B. 2 - 2)′ は簡単に，次のように書き表わされる：

$$\eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = 0 \tag{B. 3 - 2}$$

$$\eta_{\mu\nu} x^{\mu\prime} x^{\nu\prime} = 0 \tag{B. 3 - 2$'$}$$

そこで (B. 3 - 1) で結ばれた変換 $x^\mu \to x^{\mu\prime}$ に対して，もし (B. 3 - 2) が成立すれば，前述の両原理から (B. 3 - 2)′ も成立しなければならない．あるいはこれをもう少し強い要請におきかえて，(B. 3 - 1) の関係式が，さらに

$$\eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = \eta_{\mu\nu} x^{\mu\prime} \cdot x^{\nu\prime} \tag{B. 3 - 3}$$

を満足すべきであると要請しよう．この要請は未定係数 $a^\mu{}_\nu$ に制限をつけることになる．すなわち (B. 3 - 1) を (B. 3 - 3) の右辺に代入して，両辺の x の係数を比べると，次の条件式が求められる：

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\rho\sigma} a^\rho{}_\mu a^\sigma{}_\nu \tag{B. 3 - 4}$$

そこで一般の Lorentz 変換を次のように定義しよう．

(B. 3 - 1) **で規定された座標変換** $x \to x'$ **の係数** $a^\mu{}_\nu$ **が条件** (B. 3 - 4) **を満足するとき，この座標変換は Lorentz 変換である．**

(B. 2 - 3) の係数が (B. 3 - 4) を満足していることは容易にたしかめられる．(B. 3 - 4) は添字 (μ, ν) について対称であるから，これは合計 10 個の条件式である．したがって見かけ上 16 個の成分をもつ係数 $a^\mu{}_\nu$ のうちで，この 10 個の条件式のために，実際には 16 − 10 = 6 個の成分の値だけが自由に選ばれ得る．したがって ∞^6 個の多種多様な Lorentz 変換が存在し，これらは全体として **Lorentz 群** とよばれる．

(B. 3 - 4) から容易に導かれる $a^\mu{}_\nu$ の大事な性質を 2 つ付記する．その 1 つは

$$|a^0{}_0| \geqq 1.$$

$a^\mu{}_\nu$ を4行4列のマトリックスと考え，その行列式を $\det(a^\mu{}_\nu)$ と書けば，係数 $a^\mu{}_\nu$ のもつもう1つの性質は

$$\det(a^\mu{}_\nu) = \pm 1.$$

$a^0{}_0 \geq 1$ にして，そのうえ $\det(a^\mu{}_\nu) = 1$ である Lorentz 変換を**本義ローレンツ変換**（proper Lorentz transformation）とよぶ．本義変換だけの集合もまた1つの群となる．

§B.4 テンソル算

特殊相対性原理は，換言すれば，物理法則を示す方程式が Lorentz 変換

$$x^\mu \to x^{\mu\prime} = a^\mu{}_\nu x^\nu \qquad \text{(B. 4-1)}$$

に対して，その形をかえないという要請といえよう．そこでまず各種の物理量が Lorentz 変換に応じて，どのように変換されるかを知る必要がある．テンソル算はこの目的に合致したもので，それは座標変換に応じて種々の量（テンソル）がどのように変換するかを教えてくれる．それゆえもし物理量がすべてテンソルで表わされれば，特殊相対性原理の要請を満足していることが一目瞭然となるように物理法則を書き表わすことが可能となろう．そこでしばらくテンソル算の概要を述べよう．

スカラー

ある慣性系Sを基準にして，測定された物理量を x^μ の1個の関数 $\theta(x, y, z, t)$，あるいは略して $\theta(x)$ で表わす．一方，(B. 4-1) で結ばれる第2の慣性系 S′ からみたとき，同じ時空点における同じ物理量が $\theta'(x')$ で表わされるとする．もし

$$\theta(x) = \theta'(x') \qquad \text{(B. 4-2)}$$

が成り立つときは θ を**スカラー**という．［注意：S′ からみたときの関数の形 θ' が S からみた θ と同じ関数形である必要はない．同じ時空点で両者の数値が等しいだけで充分である．なお時間，空間は一緒にして **4次元時空**と呼ばれる．］

反変ベクトル

Sからみたとき4個の関数 $\{A^\mu(x)\}$ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ で表わされる量がある．これを S′ から測定したとき $\{A^{\mu\prime}(x')\}$ で表わされるとして，もし両者の間に

$$A^{\mu\prime}(x') = \frac{\partial x^{\mu\prime}}{\partial x^\nu} \cdot A^\nu(x) = a^\mu{}_\nu \cdot A^\nu(x) \qquad \text{(B. 4-3)}$$

が成立するとき $\{A^\mu(x)\}$ で表わされる量を**反変ベクトル**，A^0, A^1, A^2, A^3 をそれぞれその成分という．(B. 4-1) から，x^μ 自身は (B. 4-3) の A^μ と同じ関係を満足するから，$\{x^\mu\}$ は1つの反変ベクトルである．

共変ベクトル

Sからみたとき4個の関数 $\{B_\mu(x)\}$ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ で表わされる量がある．これを S′ からみたとき $B'_\mu(x')$ とする．

$$B'_\mu(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu\prime}} \cdot B_\nu(x) \qquad \text{(B. 4-4)}$$

が成り立つとき，この1組の量 $\{B_\mu(x)\}$ を**共変ベクトル**とよぶ．

(B.4-1) を x について解くと

$$x^\nu = a_\mu{}^\nu \cdot x^{\mu'} \quad (\text{ただし } a_\mu{}^\nu = \eta_{\mu\alpha} a^\alpha{}_\beta \cdot \eta^{\beta\nu}) \tag{B.4-5}$$

となる．ここに

$$\eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & : \mu = \nu = 1, 2, 3 \\ 0 & : \mu \neq \nu \\ -1 & : \mu = \nu = 0 \end{cases}$$

(B.4-5) が正しい答であることは，これの右辺の $x^{\mu'}$ に (B.4-1) を代入し (B.3-4) を使い，さらに関係式

$$\eta^{\mu\nu}\eta_{\nu\rho} = \delta^\mu_\rho = \begin{cases} 1 & \mu = \rho \\ 0 & \mu \neq \rho \end{cases}$$

を用いれば容易に証明できる．

(B.4-5) を使うと共変ベクトルの定義式は次のようになる．

$$B'_\mu(x') = a_\mu{}^\nu \cdot B_\nu(x). \tag{B.4-4)'$$

$\Theta(x)$ をスカラーとするとき $\partial_\mu\Theta (= \partial\Theta/\partial x^\mu)$ が (B.4-4) の B_μ と同じ振る舞いをすることは容易にわかる．したがって $\partial_\mu\Theta$ は共変ベクトルである．

テンソル

上述のベクトルの定義をさらに一般化して，いま上ツキ添字が n 個，下ツキ添字が m 個の1組の関数 $\{T^{\mu_1\cdots\mu_n}_{\nu_1\cdots\nu_m}(x)\}$ を考える．これは S 系からみた時のある物理量を表わすものとする．これを S' からみたとき $\{T^{\mu_1\cdots\mu_n\,'}_{\nu_1\cdots\nu_m}(x')\}$ として，両者の間に

$$T^{\mu_1\cdots\mu_n\,'}_{\nu_1\cdots\nu_m}(x') = a^{\mu_1}{}_{\alpha_1} \cdots a^{\mu_n}{}_{\alpha_n} \cdot a_{\nu_1}{}^{\beta_1} \cdots a_{\nu_m}{}^{\beta_m} \cdot T^{\alpha_1\cdots\alpha_n}_{\beta_1\cdots\beta_m}(x) \tag{B.4-6}$$

が成り立つとき，この1組の量 $\{T^{\mu_1\cdots\mu_n}_{\nu_1\cdots\nu_m}(x)\}$ を $n+m$ **階のテンソル**という．

(B.4-6) の変換則が示すように上ツキ添字は反変的変換則にしたがい，下ツキ添字は共変的性格を示す．このように両方の変換性をあわせもったテンソルを**混合テンソル**という．反変ベクトルは $n=1, m=0$ に相当し，共変ベクトル，スカラーはそれぞれ，$(n=0, m=1)$ と $(n=m=0)$ の場合にあたる．

これからは各種の量の変換性は添字の個数とその上下の位置によって表わすことにする．なお本書の §6 と重複するが以下にテンソル算の規則を簡単に列記する：

a) c がスカラー，$T^{\mu\cdots}_{\nu\cdots}$ がテンソルなら，$cT^{\mu\cdots}_{\nu\cdots}$ は，もとの $T^{\mu\cdots}_{\nu\cdots}$ と同じタイプのテンソルである．

b) a, b をスカラー，$A^{\mu\cdots}_{\nu\cdots}$，$B^{\mu\cdots}_{\nu\cdots}$ は同じタイプのテンソルとすれば

$$aA^{\mu\cdots}_{\nu\cdots} + bB^{\mu\cdots}_{\nu\cdots}$$

も A, B と同じタイプのテンソルである．

c) $A^{\mu\rho}_\nu(x)$，$B_{\alpha\beta\gamma}(x)$ の積を $C^{\mu\rho}_{\nu\alpha\beta\gamma}(x)$ とする．すなわち

$$C^{\mu\rho}_{\nu\alpha\beta\gamma}(x) \overset{d}{\equiv} A^{\mu\rho}_{\nu}(x)\cdot B_{\alpha\beta\gamma}(x)$$

この C はその添字の示すような変換性をもつテンソルである.（テンソル積の例）

d) $A^{\mu\nu\rho}_{\lambda\sigma}(x)$ が5階テンソルならば

$$A^{\mu\nu}_{\sigma}(x) \overset{d}{\equiv} A^{\mu\nu\lambda}_{\lambda\sigma}(x), \qquad A^{\nu}(x) \overset{d}{\equiv} A^{\sigma\nu\lambda}_{\lambda\sigma}$$

はそれぞれ3階，および1階のテンソルである.（縮約の例）

e) $A^{\mu\nu}_{\lambda}(x)$ が3階テンソルならば

$$A^{\mu}_{\lambda\nu}(x) \overset{d}{\equiv} A^{\mu\rho}_{\lambda}(x)\cdot\eta_{\rho\nu}, \qquad A^{\mu\nu\lambda}(x) \overset{d}{\equiv} A^{\mu\nu}_{\rho}(x)\cdot\eta^{\rho\lambda}$$

もまた添字の示すようなタイプのテンソルである.（添字の上げ下げの例）

f) $A^{\mu\nu}_{\lambda}(x)$ が3階テンソルならば $A^{\mu\nu}_{\lambda\cdot\rho}(x) \overset{d}{\equiv} \partial A^{\mu\nu}_{\lambda}/\partial x^{\rho}$ は4階テンソルである．一般の座標変換に対してはこのような普通の微分はテンソルの性質を破ぶるものであるが，Lorentz 変換では変換係数が x に無関係なために微分演算 $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$ は共変ベクトルとして振る舞う．これは Lorentz 変換に対するテンソルの特徴である.

g) $T^{\cdots}_{\cdots}(x)$ がテンソルならば，あるきまった4次元積分域 Ω にわたっての積分

$$I^{\cdots}_{\cdots} = \int T^{\cdots}_{\cdots}(x)d^4x, \quad d^4x \equiv dx^0dx^1dx^2dx^3$$

も，もとの $T^{\cdots}_{\cdots}$ と同じタイプのテンソルである．（ただし $\det(a^{\mu}{}_{\nu}) = 1$ の Lorentz 変換にかぎる）

最後にテンソルの便利な点を一言付け加える．テンソルの変換式 (B.4-6) が示すように，T' と T の関係は線型同次式である．そこでテンソルを使って物理法則を，たとえば，S 系からみて

$$T^{\cdots}_{\cdots}(x) = 0$$

の形に書いたとすれば，(B.4-6) の関係により，S′ 系でも同じ形の

$$T^{\cdots\prime}_{\cdots}(x') = 0$$

という式が成り立つことが容易にわかる．これがテンソル式で物理法則を表わすことの最大の長所である.

§ B.5 電磁場の方程式の特殊相対論的書きかえ

ここでは真空中に電荷や電流が局在している場合だけを考える．誘電体や磁性体内における電磁場についてはふれない.

古典 Maxwell 理論によれば，真空中での電磁場の方程式はポテンシャルを使って，次のように表わされる.

$$\Box\vec{A} = -\mu_0\vec{j}, \quad \Box\phi = -\rho/\varepsilon_0 \qquad \text{(B.5-1)}$$

$$\text{ただし} \quad \Box = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 - \left(\frac{\partial}{c\partial t}\right)^2.$$

ここに，$\vec{j}(x)$，$\rho(x)$ はそれぞれ電流密度，および電荷密度であり，これらは連続の方程式

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\vec{j}=0 \tag{B.5-2}$$

を満足する．

μ_0, ε_0 は真空の透磁率および誘電率で，単位系のとりかたにより，そのおのおのの数値は変るが $\varepsilon_0\mu_0=1/c^2$（$c=$ 光速度）という関係がある．$\vec{A}$, ϕ はそれぞれベクトルポテンシャル，ならびにスカラーポテンシャルとよばれ，磁束密度 $\vec{B}$, および電場の強さ $\vec{E}$ とは

$$\vec{B}=\operatorname{rot}\vec{A}, \qquad \vec{E}=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\operatorname{grad}\phi \tag{B.5-3}$$

で結ばれる．

(B.5-1) が Maxwell の方程式と一致するためには，$\vec{A}, \phi$ は Lorentz 条件

$$\operatorname{div}\vec{A}+\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial t}=0 \tag{B.5-4}$$

を満足しなければならない．

$\vec{B}, \vec{E}$ が既知量でも，(B.5-3) によって $\vec{A}$ と ϕ を一意的にきめることはできない．すなわち $\lambda(x)$ を任意の（x^μ）の関数とするとき

$$\vec{A}'=\vec{A}+\operatorname{grad}\lambda, \qquad \phi'=\phi-\frac{\partial\lambda}{\partial t} \tag{B.5-5}$$

によって定義された（$\vec{A}', \phi'$）から作られた $\vec{B}, \vec{E}$ は，もとの $\vec{A}, \phi$ から計算された $\vec{B}, \vec{E}$ と同じ値をもつ．もし (B.5-5) のように定義された（$\vec{A}', \phi'$）も Lorentz 条件 (B.5-4) を満足するためには，$\lambda(x)$ は

$$\Box\lambda=0$$

を満足する必要がある，（$\vec{A}, \phi$）のかわりに (B.5-5) であたえられる（$\vec{A}', \phi'$）をポテンシャルとして採用することを**ゲージ変換**という．$\vec{B}, \vec{E}$ はゲージ変換に対してその値が変らない．

さて，$j_x=j^1$, $j_y=j^2$, $j_z=j^3$ と書き，さらに $j^0=c\rho$ と定義すれば (B.5-2) は

$$\partial_\mu j^\mu=0 \tag{B.5-2)'}$$

と書き表わされる．ここでもし $j^\mu(x)$ が，その添字の示すように反変ベクトルであると仮定すれば，(B.5-2)′ はスカラー式となる．したがってS系で連続の方程式が成り立てば，S′ 系からみても，同じ形の

$$\frac{\partial j^{\mu\prime}(x')}{\partial x^{\mu\prime}}\overset{d}{\equiv}\partial'_\mu j^{\mu\prime}(x')=0 \tag{B.5-2)''}$$

が成立することになる．連続の方程式は電荷の保存則を意味するもので，もちろんSでもS′ でも成立しなければならないから，$j^\mu(x)$ を反変ベクトルと見なすべき実験的裏付けをわれわれは持っていることになる．

(B.5-1) の両式は次のように1つにまとめられる：

$$\Box A^\nu(x) = -\mu_0 j^\nu(x) \qquad \text{ただし} \ \Box = \eta^{\rho\sigma}\partial_\rho\partial_\sigma \tag{B.5-1)'}$$

ここで $A^0 = \phi/c$, $A^1 = A_x$, $A^2 = A_y$, $A^3 = A_z$ とした.

(B.5-1)′ がSでもS′でも成立するためには,(B.5-1)′ の左右両変の変換性が同じものでなければならない.□は微分演算 ∂_ρ の性質からわかるように,スカラーである.そこで $A^\nu(x)$ は $j^\nu(x)$ と同様に反変ベクトルでなければならない.

A^ν を反変ベクトルと断定することは,Lorentz 条件がスカラー式となるから,好つごうである.すなわち (B.5-4) は

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \tag{B.5-4)'}$$

となる.

ここで, 共変ベクトル $A_\mu(x)$ を $A_\mu = \eta_{\mu\nu}A^\nu$ によって定義する. すなわち ($A_0 = -A^0 = -\phi/c$, $A_1 = A_x$, $A_2 = A_y$, $A_3 = A_z$) となるから,ゲージ変換 (B.5-5) は

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\lambda(x) \tag{B.5-5)'}$$

となる. この右辺の各項はそれぞれ共変ベクトル(λ をスカラーとする)であるから A'_μ も A_μ と同様に共変ベクトルとなる. すなわちゲージ変換を行っても A_μ の共変ベクトル性は保持される.

なお場の方程式 (B.5-1)′ と Lorentz 条件 (B.5-4)′ とが両立し得ることは (B.5-2)′ を使えば容易にわかる.

次に (B.5-3) をテンソル形式に書きかえよう.それには

$$f_{\mu\nu}(x) \overset{d}{\equiv} \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = -f_{\nu\mu} \tag{B.5-6}$$

という2階共変反対称テンソルを考えよう($f_{\mu\nu} = -f_{\nu\mu}$ のとき反対称テンソルという).これを使うと

$$B_x = f_{23}, \quad B_y = f_{31}, \quad B_z = f_{12}$$

であることがすぐにわかろう.一方

$$f_{10} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\phi}{c}\right) - \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial}{\partial t}(A_x) = \frac{1}{c}E_x.$$

である.そこでこれらをマトリックスの形にならべると

$$\begin{pmatrix} f_{00} & f_{01} & f_{02} & f_{03} \\ f_{10} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{30} & \cdot & \cdot & f_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{B.5-7}$$

となる.

$(\vec{D}, \vec{H})$ および $(\vec{E}, \vec{B})$ で表わされたもとの Maxwell の方程式もテンソル形式に書き表わすことができる.

すなわち

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \mathrm{rot}\,\vec{H} = -\vec{j}, \qquad \mathrm{div}\,\vec{D} = \rho \tag{B.5-8}$$

は $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}$, $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$ を使い,(B.5-7) を使って書きかえると

$$\partial_\rho f^{\nu\rho} = \mu_0 \cdot j^\nu \tag{B.5-8$'$}$$

となる．もう 1 組の方程式

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0, \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \mathrm{rot}\,\vec{E} = 0 \tag{B.5-9}$$

は

$$\partial_\lambda f_{\mu\nu} + \partial_\mu f_{\nu\lambda} + \partial_\nu f_{\lambda\mu} = 0 \tag{B.5-9$'$}$$

という形になる．

$f_{\mu\nu}$ が (B.5-6) によって定義された量である場合には，(B.5-9)$'$ に (B.5-6) を代入すれば (B.5-9)$'$ の左辺は恒等的に 0 となってしまう．しかし，$f_{\mu\nu}$ が単に $f_{\mu\nu} = -f_{\nu\mu}$ という反対称の性質だけをもつテンソルだとして，それが (B.5-9)$'$ という条件を満足するものとしよう．その時はこの式の 3 個の添字のどれか 2 つが同じものであれば，$0 = 0$ という無内容な式となる．したがって (B.5-9)$'$ が本当に $f_{\mu\nu}$ に対して制限をあたえるのは λ, μ, ν がどれも異なった数字であるときに限る．したがって (B.5-9)$'$ は本質的には 4 個の条件式となる．$\lambda = 1$, $\mu = 2$, $\nu = 3$ とすれば，それは $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$ に相当する．なお $f_{\mu\nu} = -f_{\nu\mu}$ で，そのうえ (B.5-9)$'$ を満足する $f_{\mu\nu}$ は実は (B.5-6) のような形のものであることが証明できる．

以上の結果をまとめよう．

$f_{\mu\nu} = -f_{\nu\mu}$ は (B.5-7) によって $(\vec{B}, \vec{E})$ を表わすものとする．(その際 (B.5-6) は使わない)．これは Maxwell の理論により

$$\partial_\rho f^{\nu\rho} = \mu_0 j^\nu \tag{B.5-8$'$}$$

$$\partial_\lambda f_{\mu\nu} + \partial_\mu f_{\nu\lambda} + \partial_\nu f_{\lambda\mu} = 0. \tag{B.5-9$'$}$$

を満足する．

もし $f_{\mu\nu}$ のかわりに A^μ を使えば，A^μ は

$$\Box A^\mu = -\mu_0 j^\mu, \tag{B.5-1$'$}$$

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \tag{B.5-4$'$}$$

によって規定される．ただし A_μ は

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \lambda, \quad (\Box \lambda = 0) \tag{B.5-5$'$}$$

だけの不定性を持っている．

なお電荷の保存則を示す式として

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \tag{B.5-2$'$}$$

なお (B.5-6) で定義される $f_{\mu\nu}$ がゲージ変換 (B.5-5)$'$ に対して不変であることは一目瞭然であろう．

最後に電磁場のエネルギー・運動量テンソルを求めよう．(B.5-8)$'$ の両辺に $f_{\nu\mu}$ をかけて，左辺を少し書きかえると

$$\partial_\rho (f_{\nu\mu} \cdot f^{\nu\rho}) - \partial_\rho f_{\nu\mu} \cdot f^{\nu\rho} = \mu_0 j^\nu f_{\nu\mu} \tag{B.5-10}$$

左辺第 2 項は $f^{\nu\rho}$ が (ν, ρ) について反対称であることに目をつけると

$$-\frac{1}{2}(\partial_\rho f_{\nu\mu}-\partial_\nu f_{\rho\mu})f^{\nu\rho}=-\frac{1}{2}(\partial_\rho f_{\nu\mu}+\partial_\nu f_{\mu\rho})f^{\nu\rho}$$

とも書ける．あるいは (B.5-9)′ を使って

$$-\frac{1}{2}(\partial_\rho f_{\nu\mu}+\partial_\nu f_{\mu\rho}+\partial_\mu f_{\rho\nu})f^{\nu\rho}+\frac{1}{2}\partial_\mu f_{\rho\nu}\cdot f^{\nu\rho}=-\frac{1}{4}\partial_\mu(f_{\nu\rho}f^{\nu\rho})$$

となる．

そこで (B.5-10) は

$$\partial_\rho\left\{f_{\nu\mu}f^{\nu\rho}-\frac{1}{4}\delta^\rho_\mu f_{\alpha\beta}f^{\alpha\beta}\right\}=\mu_0 j^\nu f_{\nu\mu}$$

となる．ここで $\mu=0$ とおき，さらに両辺に c/μ_0 をかけ，3次元ベクトル記号で書きかえると

$$\text{右辺}=c\cdot j^\nu f_{\nu 0}=\vec{E}\cdot\vec{j}=(\text{単位時間中に電場が電荷にあたえる仕事})$$

$$\text{左辺}=\frac{c}{\mu_0}\partial_\rho\left\{f_{\nu 0}f^{\nu\rho}-\frac{1}{4}\delta^\rho_0 f_{\alpha\beta}f^{\alpha\beta}\right\}$$

$$=-\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\vec{D}\vec{E}+\frac{1}{2}\vec{B}\vec{H}\right)+\mathrm{div}\,(\vec{E}\times\vec{H})\right]$$

したがって，

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{2}(\vec{D}\vec{E}+\vec{B}\vec{H})\right\}=-\mathrm{div}\,(\vec{E}\times\vec{H})-\vec{E}\,\vec{j}$$

これはエネルギー保存則を示すものである．そこで電磁場のエネルギー・運動量テンソルは

$$T^\rho_\mu=-\frac{1}{\mu_0}\left\{f_{\nu\mu}f^{\nu\rho}-\frac{1}{4}\delta^\rho_\mu f_{\alpha\beta}f^{\alpha\beta}\right\} \qquad \text{(B.5-11)}$$

とすればよい．

$$T^0_0=\frac{1}{2}(\vec{D}\vec{E}+\vec{B}\cdot\vec{H}), \qquad cT^0_1=-(\vec{E}\times\vec{H})_x \qquad \text{等々,}$$

は容易にたしかめられよう．

また (B.5-10) は

$$\partial_\rho T^\rho_\mu=f_{\mu\nu}j^\nu \qquad \text{(B.5-12)}$$

となる．特に4元電流 j^μ が存在しないときは

$$\partial_\rho T^\rho_\mu=0 \qquad \text{(B.5-12)}'$$

となる．これは電磁場のエネルギー・運動量の保存則を示す．

§ B.6 特殊相対論的力学

§ B.5 で述べたように，Maxwell の方程式はなんらの修正をしなくても，そのままで特殊相対性原理を満足していることがわかった．これに反して，Newton の力学の法則は Galilei 変換に対して不変な形をしているから，Lorentz 変換に対しては不変でないこ

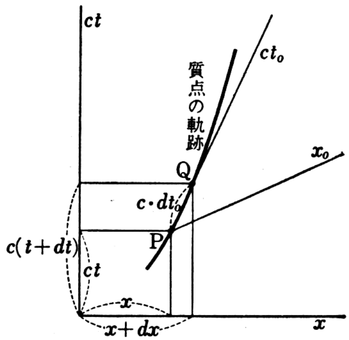
とは当然である．そこで Lorentz 変換に対して不変な形式にするには，Newton の方程式を少し手なおしする必要がある．

ところで Lorentz 変換（B.2－3）において，$v \ll c$，すなわち β の２乗以上を無視できるときは，これは Galilei 変換と一致する．したがってこのような場合には Newton の式を修正しなくてもよかろう．そこでこれから特別な座標系，すなわち或る瞬間に問題にする質点が瞬間的に静止して見えるような慣性系 S_0 を考えよう．これをこの質点の静止系とよぶ．S_0 からみて，時刻 t_0 における質点の座標を (x_0, y_0, z_0) とすると，質点の運動方程式は*)

$$m\frac{d^2\vec{x}_0}{dt_0{}^2}=\vec{f}_0 \tag{B.6-1}$$

となる．ただし時刻 t_0 では，$d\vec{x}_0/dt_0=0$ である．m は質点の質量，$\vec{f}_0$ は S_0 系からみた場合の外力である．

さて S_0 系からみて，時刻 t_0 における質点の位置を P（第 B.2 図参照）とする．また時刻が dt_0 だけ過ぎた後の位置を $Q(x_0+dx_0, y_0+dy_0, z_0+dz_0)$ とする．一方，任意の慣性系 S から眺めたとき，P, Q の座標をそれぞれ (t, x, y, z) および $(t+dt, x+dx, y+dy, z+dz)$ とする．$\overline{PQ}$ の間の４次元的不変距離の２乗 ds^2 は



第B．2図

$$-ds^2=\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \text{（S系）}$$
$$=\eta_{\mu\nu}dx_0^\mu\cdot dx_0^\nu \text{（}S_0\text{ 系）}$$

であたえられる．これは書きなおすと

$$ds^2=c^2(dt)^2\left\{1-\left(\frac{d\vec{x}}{cdt}\right)^2\right\}=c^2(dt_0)^2\left\{1-\left(\frac{d\vec{x}_0}{cdt_0}\right)^2\right\}>0.$$

ds^2 は Lorentz 不変量である．いま $ds^2=(cd\tau)^2$ とおくと

$$d\tau=dt\sqrt{1-\left(\frac{d\vec{x}}{cdt}\right)^2}=dt_0\sqrt{1-\left(\frac{d\vec{x}_0}{cdt}\right)^2}$$

ところで仮定により S_0 からみれば，質点の速度は時刻 t_0 には０だから

$$d\tau=dt\sqrt{1-(\vec{v}/c)^2}=dt_0 \tag{B.6-2}$$

したがって質点に固定され，質点と共に走る時計の読み t_0 は Lorentz 不変量 τ に等しい．この t_0（したがってまた τ）を質点の**固有時間**（proper－time）という．（B.6－2）の $\vec{v}$ は S からみたときの，問題の瞬間における質点の速度である．

そこで t_0 のかわりに不変量 τ を使うと（B.6－1）は

*) t, x や f の下についた０は S_0 系を基準にした量であることを示すもので，ベクトルの第０成分と混同してはならない．

$$m\frac{d^2x_0{}^\mu}{d\tau^2}=f_0^\mu \qquad \text{(B. 6-1)}'$$

となる．$\mu=1,2,3$ は (B. 6-1) そのままである．$\mu=0$ に対しては $t_0=\tau$ だから

$$m\frac{d^2x_0^0}{d\tau^2}=m\cdot c\cdot\frac{d^2t_0}{d\tau^2}=0.$$

そこで，f_0^μ の第0成分 $f_0^0=0$ と定義すれば，(B. 6-1) は (B. 6-1)′ の形となる．

さて τ は不変量（スカラー）であるから (B. 6-1)′ の左辺は反変ベクトルである．そこでこれが正しい力学の方程式であるならば，右辺もまた反変ベクトルでなければならない．これを要請すれば，任意の慣性系からみた力学の方程式を書きくだすことは容易である．S系と S_0 系とが Lorentz 変換

$$x^\mu=a^\mu{}_\nu\cdot x_0^\nu \qquad f^\mu=a^\mu{}_\nu\cdot f_0^\nu$$

で結ばれていれば，S系に於ける方程式は

$$m\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}=f^\mu \qquad \text{(B. 6-3)}$$

となる．

(B. 6-3) の f^μ は**4元力**とよばれる．これは4次元ベクトルであるが，独立な成分は実は3個である．このことは S_0 系で見れば $f_0^0=0$ となるから容易にわかる．一般に τ の定義から

$$-c^2\equiv\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\cdot\frac{dx^\nu}{d\tau} \qquad \text{(B. 6-4)}$$

これを τ でもう1度微分すると，

$$\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2}\equiv 0. \qquad \text{(B. 6-4)}'$$

そこで (B. 6-3) の両辺に $\frac{dx^\nu}{d\tau}\cdot\eta_{\mu\nu}$ をかけると左辺は (B. 6-4)′ によって0となるから

$$\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{d\tau}f^\mu=\frac{dx^\nu}{d\tau}f_\nu=0 \qquad \text{(B. 6-5)}$$

ただし $f_\nu\equiv\eta_{\nu\mu}f^\mu$．(B. 6-5) は f^μ の4個の成分の間に1つの線型関係があることを示す．

さて**4元運動量** p^μ を

$$p^\mu\overset{d}{\equiv}m\frac{dx^\mu}{d\tau}. \qquad \text{(B. 6-6)}$$

によって定義すれば，(B. 6-3) は

$$\frac{dp^\mu}{d\tau}=f^\mu \qquad \text{(B. 6-3)}'$$

となる．この $\mu=1,2,3$ を3次元ベクトル記号で書くと，$\left(\frac{d\tau}{dt}\right.$ を両辺にかけると$\left.\right)$

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{f}\frac{d\tau}{dt}=\vec{f}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

この左辺は運動量の時間的変化の割合を示すから，右辺は S 系からみた（Newton 力学における意味の）力$\vec{F}$を示す．すなわち

$$\vec{F} \overset{d}{\equiv} \vec{f}\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \qquad \text{(B. 6-7)}$$

さて（B. 6-7）を使って（B. 6-5）を書きかえると

$$cf^0 = \frac{dx^0}{dt}\cdot f^0 = \vec{f}\cdot\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\cdot\left(\vec{F}\cdot\frac{d\vec{x}}{dt}\right) = \frac{dt}{d\tau}\cdot\left(\vec{F}\cdot\frac{d\vec{x}}{dt}\right)$$

そこで（B. 6-3)′ の $\mu=0$ 成分の両辺に $c\cdot\dfrac{d\tau}{dt}$ をかけると

$$\frac{d}{dt}(cp^0) = \left(\vec{F}\cdot\frac{d\vec{x}}{dt}\right).$$

この右辺はS系からみて単位時間中に外力$\vec{F}$が質点にあたえる仕事を示す．したがって cp^0 は質点の運動エネルギーEと解釈してよい．

（B. 6-6）を 3 次元ベクトル記号で書くと

$$\left.\begin{aligned} \vec{p} &= \frac{mv}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \\ \frac{E}{c} &= p^0 = \frac{mc}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(B. 6-6)}'$$

となる．

（B. 6-4）の両辺に m^2 をかけ，（B. 6-6）を使うと

$$-m^2c^2 = \eta_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = p_\mu p^\mu \qquad \text{(B. 6-8)}$$

あるいは

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 = m^2c^2 + (\vec{p})^2 \qquad \text{(B. 6-8)}'$$

という有名な関係式が求まる．なお（B. 6-6′）で $v\to 0$ とすると

$$E = mc^2$$

となる．これは質量mをもつ質点の静止エネルギーといわれる．

質点が電荷 e をもち，あたえられた電磁場 $\vec{E}$, $\vec{B}$（あるいはテンソル形式で書いて$f_{\mu\nu}$）の中で運動しているとき，その方程式は，

$$m\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = \frac{dp^\mu}{d\tau} = ef^{\mu\nu}\frac{dx^\rho}{d\tau}\cdot\eta_{\nu\rho} \qquad \text{(B. 6-9)}$$

となる．この式が

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\left(\vec{E} + \frac{d\vec{x}}{dt}\times\vec{B}\right)$$

を相対論的に書きかえたものであることは，（B. 6-9）の $\mu=1,2,3$ 成分を 3 次元ベクトル記号を使って書いて見ればすぐにわかる．

(B. 6－9) の右辺

$$f^{\mu}\overset{d}{\equiv}ef^{\mu\nu}\frac{dx^{\rho}}{d\tau}\cdot\eta_{\nu\rho}$$

は **Minkowski の 4 元力**とよばれる．これが (B. 6－5) の条件を満足していることは $f_{\mu\nu}=-f_{\nu\mu}$ の性質から容易にわかる：

$$f^{\mu}\cdot\frac{dx^{\sigma}}{d\tau}\cdot\eta_{\mu\sigma}=ef^{\mu\nu}\frac{dx^{\rho}}{d\tau}\frac{dx^{\sigma}}{d\tau}\eta_{\nu\rho}\eta_{\mu\sigma}$$

$$=ef_{\sigma\rho}\frac{dx^{\sigma}}{d\tau}\frac{dx^{\rho}}{d\tau}\equiv 0. \qquad (f_{\sigma\rho}\overset{d}{\equiv}f^{\mu\nu}\eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho})$$

最後に方程式 (B. 6－9) は，次のような Lagrange 関数から Hamilton の変分原理によって導かれることを示そう．

いま質点の 4 次元座標 x^{μ} をその固有時 τ の関数と考えて

$$L=-\frac{m}{2}\eta_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\cdot\frac{dx^{\nu}}{d\tau}-eA_{\nu}(x)\cdot\frac{dx^{\nu}}{d\tau}$$

という Lagrange 関数を考える．作用積分

$$I=\int L d\tau$$

を x^{μ} について変分をとれば，Euler の方程式

$$\frac{\partial L}{\partial x^{\mu}}-\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\right)}\right)=0$$

が求まる．これは

$$-e\frac{\partial A_{\nu}}{\partial x^{\mu}}\frac{dx^{\nu}}{d\tau}+m\cdot\frac{d}{d\tau}\left(\eta_{\mu\nu}\frac{dx^{\nu}}{d\tau}\right)+e\frac{d}{d\tau}A_{\mu}(x)=0.$$

この第 3 項は

$$\frac{dA_{\mu}}{d\tau}=\frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu}}\frac{dx^{\nu}}{d\tau}$$

となるから

$$m\frac{d^2x_{\mu}}{d\tau^2}=ef_{\mu\nu}\frac{dx^{\nu}}{d\tau} \qquad (\text{ただし}\quad x_{\mu}=\eta_{\mu\nu}x^{\nu})$$

なお，この L は Lorentz 不変量であるばかりでなく，ゲージ変換に対しても不変である．なぜならば，

$$L'=-\frac{m}{2}\eta_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\frac{dx^{\nu}}{d\tau}-e\,A'_{\mu}(x)\cdot\frac{dx^{\mu}}{d\tau}$$

$$=L-e\frac{\partial\lambda}{\partial x^{\mu}}\cdot\frac{dx^{\mu}}{d\tau}=L-e\frac{d\lambda(x)}{d\tau}$$

この最後の項は変分をとる場合に効かないから L' と L とは，運動方程式を導くためには，実質的に同等である．

特殊相対性理論としては，以上のほかに，媒質中における電磁気学とか，熱力学，弾性

体の力学をいずれも相対論的な形式に書き表わさなければならない．しかし本書の一般相対性理論を読むためには以上述べたことで満足とまではいかなくとも，一応ことたりると思う．

参 考 文 献

一般相対論だけを書いた書物はほとんどないが，特殊相対論も一緒にした参考書としては，以下にあげるものは代表的なものといえよう．

(1) H. Weyl : Space-time-matter (translated from the German by H. L. Brose) Methuen & Co. Ltd., London (1922)

(2) A. S. Eddington : The mathematical theory of relativity, Cambridge University Press, London (1930)

(3) W. Pauli : Theory of relativity (translated from the German by G. Field), Pergamon Press, London (1958)

(4) L. Landau and E. Lifshitz : The classical theory of fields. (translated from the Russian by M. Hamermesh), Addison-Wesley Press, Inc., Cambridge, Mass. (1951)

(5) C. Møller : The theory of relativity, Oxford University Press, London (1952)

(6) E. Schrödinger : Space-time structure, Cambridge University Press, London (1954)

(7) J. L. Synge : Relativity, The general theory, North-Holland Publishing Co., Amsterdam (1960)

(8) J. Weber : General relativity and gravitational waves, Interscience Publishers. Inc., New York (1961)

(9) V. Fock : The theory of space time and gravitation (translated from the Russian by N. Kemmer), Pergamon Press, London (1964)

(1) は Weyl の名著として有名であるが現在は入手し難いと思う．

(2) は表題通り数学的な本であるが，現在では数学的にみてもちょっと古すぎる．

(3) は Pauli がまだ学生のときに書いた有名な本である．内容も相当につっこんで書いてあり，しかも非常にすっきりした名著といえる．

(4) は表題通り，場の理論の本である．しかし内容は電磁場を特殊相対論的に，また重力場を一般相対論的に記述したもので，これも大変スマートな，しかも比較的程度の高い独特なスタイルの本で一読にあたいする．邦訳されている．

(5) はもっとも標準的な相対論の教科書である．いささかごたごたしたところもあるが，入門書として一読をすすめる．邦訳もある．

(6) は数学的な面に重点をおいた小冊子である．その内容は高度ではあるが，実に説明が明快で，小冊子にもかかわらず一般相対論の重点はすべてつくされている．実にすば

らしい本といえる.

（7） Synge の書物には（7）と姉妹編の特殊相対論に関する別冊があるが,（7）はもっぱら一般相対論だけを述べたものである. これは今まで紹介したものと全くちがったスタイルの書物である. 数学者のかいた本であるから数学的にすぎるという欠点はあるが, 内容も新らしく, しかも特異なものである. 相対論の観測理論についても詳細な議論が述べられている. Advanced course の読者にすすめる.

（8） は読みやすい, 親しみのもてる小冊子である. しかし重力波は著者 Weber のお家芸なので, 力をいれて書いてある.

（9） は, ごたごたした本ではあるが, 場の方程式の数学的議論が徹底的に論じられており, 非常にまじめに良心的にかかれた名著である. “相対性理論” という言葉の解釈については著者 Fock は彼の独特のものをもっており, ともかく類をみないおもしろい書物である. 高程度の読者の一読に値いする.

索　　引

ページの太数字は主要解説を表示，→印は参照項目を示す．

キ ギ

ク グ

ケ ゲ

コ

サ ザ

シ ジ

ヤ

ヨ

ラ

リ

レ

ロ

付録 B. 索引

著者略歴

山内恭彦：1902年横浜市出身　日本学士院会員　東大名誉教授
　理博

内山龍雄：1916年静岡県出身　旧制静岡高校，阪大理学部物理学科卒　同学助手，講師，助教授を経て現在阪大教授（理学部物理学科）．"一般相対論および重力"の国際委員会常任委員，その間米国プリンストン高級研究所員，米国ノースカロライナ大学 場の物理学研究所客員教授として在外研究　理博

中野董夫：1926年東京都出身　旧制東京高校，阪大理学部物理学科卒，阪大大学院を了し，大阪市大理学部助手，同講師，同助教授を経て現在大阪市大理学部教授(物理学科)．その間プリンストン高級研究所，タタ基礎研究所にて研究　理博　主な著書「岩波講座　現代物理学 III. E. 新粒子論」，「素粒子の本質」（ともに共著）

一般相対性および重力の理論　　**定価 2,500 円**

昭和42年12月1日　第1版印刷
昭和42年12月5日　第1版発行 ©
昭和50年10月20日　第6版発行

著作者の了解により検印を省略いたします

著　者　山内恭彦（やまのうち たかひこ）
　　　　内山龍雄（うちやま りょうゆう）
　　　　中野董夫（なかの ただお）

発行者　安孫子貞次

発行所　東京都千代田区四番町8番地
　　　　電話 東京 262—9166～8
　　　　株式会社 裳華房

印刷所　東京都墨田区亀沢1—9—14
　　　　横山印刷株式会社

製本所　東京都新宿区新小川町2の4
　　　　株式会社 青木製本所